第28卷 第3期 工 程 数 学 学 报 Vol. 28 No. 3
2011年06月 CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS June 2011

文章编号:1005-3085(2011)03-0323-12

带有Beddington-DeAngelis功能反应、脉冲、连续时滞和广义扩散函数的捕食者-食饵系统的定性分析*

王 烈, 陈斯养, 石 茂
(陕西师范大学数学与信息科学学院，西安 710062)

摘 要: 本文定性分析了具有Beddington-DeAngelis功能反应、脉冲、连续时滞和广义扩散函数的捕食者-食饵系统．利用脉冲微分方程的比较原理给出了系统持续生存的条件，并使用不动点理论证明了正周期解的存在性，进而给出了系统存在正周期解的充分条件．最后通过构造Lyapunov泛函证明了系统周期解的全局渐近稳定性．该结论可为现实的生物资源管理提供可靠的策略依据．

关键词: 捕食者-食饵系统；脉冲；时滞；正周期解；全局渐近稳定

分类号: AMS(2000) 92D30; 34C10; 34K15 **中图分类号**: O175.7 **文献标识码**: A

1 引言

捕食者-食饵系统是非常重要的生态系统，该系统正周期解的存在性和一致持久性已有相关的研究成果[1-3]．在种群的相互作用中时滞是不可避免的，文献[4-13]中研究了时滞对捕食者-食饵系统的影响．迁移现象是生物种群生存过程中一种非常普遍的现象；再考虑到人为干预种群生长、繁衍的情况，文献[14-20]中研究了扩散及脉冲因素对捕食者-食饵系统的影响．最近的研究表明，在某些情况下，Beddington-DeAngelis功能反应函数可以更好的反映多个食饵和捕食者的捕食者-食饵系统，文献[21-26]讨论了Beddington-DeAngelis功能反应函数在一些生态模型中的应用．

本文主要考虑下面具有Beddington-DeAngelis功能反应、脉冲、连续时滞和广义扩散函数的捕食者-食饵系统

$$\begin{cases} t\neq t_k,\quad k=1,2,\cdots,\\ \quad x_1'=x_1\big[a_1(t)-a_{11}(t)x_1(t)-l_{11}(t)\int_{-\tau}^{0}k_{11}(s)x_1(t+s)\mathrm{d}s\\ \qquad\quad -\frac{c(t)y(t)}{\alpha(t)+\beta(t)x_1(t)+\gamma(t)y(t)}\big]+d_1(t)f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n),\\ \quad x_i'=x_i\big[a_i(t)-a_{ii}(t)x_i(t)-l_{1i}(t)\int_{-\tau}^{0}k_{1i}(s)x_i(t+s)\mathrm{d}s\big]\\ \qquad\quad +d_i(t)f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n),\quad i=2,3,\cdots,n,\\ \quad y'=y\big[-b_1(t)-b_{11}(t)y(t)-l_{21}(t)\int_{-\tau}^{0}k_{21}(s)y(t+s)\mathrm{d}s+\frac{g(t)x_1(t)}{\alpha(t)+\beta(t)x_1(t)+\gamma(t)y(t)}\big],\\ t=t_k,\quad k=1,2,\cdots,\\ \quad x_i(t_k^+)=(1-\theta_k^i)x_i(t_k),\quad i=1,2,\cdots,n,\\ \quad y(t_k^+)=(1-\mu_k)y(t_k), \end{cases}\tag{1}$$

收稿日期: 2009-08-07. **作者简介**: 王烈(1972年10月生)，男，博士，讲师. 研究方向：生态数学.
***基金项目**: 国家自然科学基金(60671063; 10871122).

其中 $x_i(t)$, $i=1,2,\cdots,n$, $y(t)$ 分别表示食饵和捕食者的种群密度，而且食饵 $x_1(t)$ 和捕食者 $y(t)$ 被限制在斑块1中．$a_i(t)$, $a_{ii}(t)$, $l_{1i}(t)$, $i=1,2,\cdots,n$, $b_1(t)$, $b_{11}(t)$, $c(t)$, $g(t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ 是严格正的有界连续函数且具有正周期 ω．$d_i(t)$ 是扩散系数，常数 $\tau\in[0,+\infty)$，函数 $k_{1i}(t)\geq 0$, $i=1,2,\cdots,n$, $k_{21}(t)\geq 0$ 是定义在 $[-\tau,0]$ 上的分段连续函数，而且是正规化的函数，即

$$\int_{-\tau}^{0}k_{1i}(t)\mathrm{d}t=1,\quad i=1,2,\cdots,n,\quad \int_{-\tau}^{0}k_{21}(t)\mathrm{d}t=1.$$

广义扩散函数 $f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,(i=1,2,\cdots,n)$ 在 $[0,+\infty]$ 上连续且满足如下条件：

1) 当 $x_i>x_j\,(j\neq i, j=1,2,\cdots,n)$ 时，$f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)<0$, $f_j(x_1,x_2,\cdots,x_n)>0$;

2) 当 $x_i<x_j\,(j\neq i,\ j=1,2,\cdots,n)$ 时，$f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)>0$, $f_j(x_1,x_2,\cdots,x_n)<0$;

3) $|f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)-f_i(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\cdots,\tilde{x}_n)|\leq L_i\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i-\tilde{x}_i|$，其中 L_i 为常数．

脉冲参数 θ_k^i, $i=1,2,\cdots,n$, μ_k 是正常数，且存在一个正整数 q，满足 $\theta_{k+q}^i=\theta_k^i$, $i=1,2,\cdots,n$, $\mu_{k+q}=\mu_k, t_{k+q}=t_k+\omega$, $k\in\mathrm{N}$．根据实际意义可知，$1-\theta_k^i>0$, $i=1,2,\cdots,n$, $1-\mu_k>0$．参数 t_k 满足

$$0<t_1<t_2<\cdots<t_k<\cdots,\quad \lim_{k\to+\infty}t_k=+\infty.$$

$\prod\limits_{0<t_k<t}(1-\theta_k^i)$, $i=1,2,\cdots,n$, $\prod\limits_{0<t_k<t}(1-\mu_k)$ 是以 ω 为周期的周期函数．对所有 $t\geq 0$，存在两个正常数 n_1 和 N_1，满足

$$n_1\leq\prod_{0<t_k<t}(1-\theta_k^i)\leq N_1,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

对所有 $t\geq 0$，存在两个正常数 n_2 和 N_2，满足 $n_2\leq\prod\limits_{0<t_k<t}(1-\mu_k)\leq N_2$．记

$$\mathbf{R}_+^{n+1}=\big\{(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)\in\mathbf{R}^{n+1}\,|\,x_i\geq 0,\ i=1,2,\cdots,n,\ y\geq 0\big\}.$$

系统(1)的初始条件由以下函数给出

$$x_i(s)=\varphi_i(s)>0,\quad i=1,2,\cdots,n,\quad y(s)=\psi(s)>0,\quad s\in[-\tau,0],\tag{2}$$

其中 φ_i, $\psi\in C^1([-\tau,0],\mathbf{R}_+^{n+1})$, $i=1,2,\cdots,n$.

为了讨论方便，采用以下记号和假设．记 $PC(\mathbf{R}^+,\mathbf{R})$ 是满足以下条件的函数集合 ϕ : $\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$．函数 $\phi(t)$ 在 $t\in\mathbf{R}^+$ 且 $t\neq t_k$ 处连续，点 $t_k\in\mathbf{R}^+$ 是函数的第一类不连续点且在该点处的左极限存在．记带有正周期 ω 的Banach空间为

$$PC_\omega=\big\{\phi\in PC([0,\omega],\mathbf{R})\,|\,\phi(0)=\phi(\omega)\big\}\times\Big\{\|\phi\|_{PC}=\sup_{t\in[0,\omega]}|\phi(t)|\Big\},$$

记

$$f^l=\min_{t\in[0,\omega]}f(t),\quad f^m=\max_{t\in[0,\omega]}f(t),\quad \bar{f}=\frac{1}{\omega}\int_0^\omega f(t)\mathrm{d}t,$$

其中 $f(t)\in PC_\omega$.

2　系统 (1) 的一致持久性

定义 2.1　如果存在有界紧集 $\Gamma \in \mathbf{R}_+^{n+1}$，使得系统 (1) 满足初始条件 (2) 的每一个解最终都进入并滞留在集合 Γ 中，则称系统 (1) 是一致持久的.

引理 2.1　假设有如下的脉冲方程

$$\begin{cases} s'(t) = s(t)\big(a_1(t) - a_{11}(t)s(t)\big), \quad t \neq t_k, \quad k = 1, 2, \cdots, \\ s(t_k^+) = m_k s(t), \quad t = t_k, \quad k = 1, 2, \cdots, \end{cases} \tag{3}$$

和非脉冲方程

$$x'(t) = x(t)\Big(a_1(t) - a_{11}(t) \prod_{0 \le t_k < t} m_k x(t)\Big), \tag{4}$$

其中函数 $a_1(t)$, $a_{11}(t)$ 是严格正的有界连续函数且具有正周期 ω，参数 t_k 满足

$$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k < \cdots, \quad \lim_{k \to +\infty} t_k = +\infty.$$

脉冲参数 m_k 满足 $0 < m_k < 1$，且存在一个正整数 q，有 $m_{k+q} = m_k$，$t_{k+q} = t_k + \omega$，$k \in \mathrm{N}$ 成立，则有以下结论：

1)　如果 $x(t)$ 是 (4) 在 $[-\tau, +\infty)$ 上的解，则 $s(t) = \prod_{0 \le t_k < t} m_k x(t)$ 是 (3) 的解；

2)　如果 $s(t)$ 是 (3) 在 $[-\tau, +\infty)$ 上的解，则 $x(t) = \prod_{0 \le t_k < t} \frac{1}{m_k} s(t)$ 是 (4) 的解.

证明　设 $x(t)$ 是 (4) 在 $[-\tau, +\infty)$ 上的解，则 $s(t) = \prod_{0 \le t_k < t} m_k x(t)$ 在区间 $(t_k, tk+1]$，$k = 1, 2, \cdots$ 是连续的，且对任意 $t \neq t_k$，$k = 1, 2, \cdots$，有

$$s'(t) - s(t)\big(a_1 - a_{11}s(t)\big) = \prod_{0 \le t_k < t} m_k \Big(x'(t) - x(t)\Big(a_1 - a_{11} \prod_{0 \le t_k < t} m_k x(t)\Big)\Big) = 0, \tag{5}$$

另一方面，对任意 $t_k \in \{t_k, k = 1, 2, \cdots\}$，有

$$s(t_k^+) = \lim_{t \to t_k^+} \prod_{0 \le t_k < t} m_j x(t) = \prod_{0 \le t_j \le t_k} m_j x(t_k),$$

由已知的脉冲点的条件 $s(t_k^+) = \prod_{0 \le t_j < t_k} m_j x(t_k)$，综合以上两式可以推出

$$s(t_k^+) = m_k s(t_k), \tag{6}$$

从 (5) 和 (6) 可知，$s(t) = \prod_{0 \le t_k < t} m_k x(t)$ 是 (3) 的解.

假设 $s(t)$ 是 (3) 在 $[-\tau, +\infty)$ 上的解，则 $s(t)$ 在区间 $(t_k, t_{k+1}]$ $(k = 1, 2, \cdots)$ 是连续的. 结合式 (6) 可知，对任意 $k = 1, 2, \cdots$，有

$$x(t_k^+) = \prod_{0 \le t_j \le t_k} \frac{1}{m_j} s(t_k^+) = \prod_{0 \le t_j < t_k} \frac{1}{m_j} s(t_k) = x(t_k),$$

$$x(t_k^-) = \prod_{0 \le t_j \le t_k} \frac{1}{m_j} s(t_k^-) = \prod_{0 \le t_j < t_k} \frac{1}{m_j} s(t_k) = x(t_k),$$

从而 $x(t)$ 在 $[-\tau,+\infty)$ 上连续，且满足方程 (4)，所以 $x(t)=\prod\limits_{0\le t_k<t}\frac{1}{m_k}s(t)$ 是 (4) 的解.

引理2.2 $\mathbf{R}_+^{n+1}$ 是系统 (1) 的不变集.

引理2.3 设常数 $M>0$，则系统 (1) 满足初始条件 (2) 的任一解 $(x_1(t),x_2(3),\cdots,x_n(t),y(t))$，当时间 t 充分大时有 $x_i(t)\le M,\ i=1,2,\cdots,n,\ y(t)\le M$.

证明 令 $V(t)=\max\{x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)\}$，沿系统 (1) 计算 $V(t)$ 的右上导数，则有以下几种可能：

1) $V(t)=x_1(t)$，则

$$D^+V(t)\le x_1(t)\big(a_1(t)-a_{11}(t)x(t)\big)\le V(t)\big(a_1^m-a_{11}^lV(t)\big);\tag{7}$$

2) $V(t)=x_j(t),\ j=2,3,\cdots,n$，则

$$D^+V(t)\le x_j(t)\big(a_j(t)-a_{jj}(t)x(t)\big)\le V(t)\big(a_j^m-a_{jj}^lV(t)\big).\tag{8}$$

令 $\tilde A_1\in\{a_i^m,\ i=1,2,\cdots,n\}$，$\tilde A_{11}\in\{a_{ii}^l,\ i=1,2,\cdots,n\}$，而且满足

$$\frac{\tilde A_1}{\tilde A_{11}}=\max\Big\{\frac{a_i^m}{a_{ii}^l},\ i=1,2,\cdots,n\Big\}=M_1,$$

则结合系统 (1) 和 (7), (8) 式，可以得到如下脉冲系统

$$\begin{cases} D^+V(t)\le V(t)\big(\tilde A_1-\tilde A_{11}V(t)\big), & t\ne t_k,\quad k=1,2,\cdots,\\ V(t^+)=m_kV(t), & t=t_k,\quad k=1,2,\cdots,\end{cases}\tag{9}$$

其中 $m_k=\max\{1-\theta_k^i,\ i=1,2,\cdots,n\}$，初值条件为

$$V(s)=\max\big\{\varphi_i(s),\ i=1,2,\cdots,n,\ s\in[-\tau,0]\big\},\quad V(0^+)=\max\big\{\varphi_i(0),\ i=1,2,\cdots,n\big\}.$$

考虑如下非脉冲方程

$$v'(t)=v(t)\Big(\tilde A_1-\tilde A_{11}\prod_{0\le t_k<t}m_kv(t)\Big),\tag{10}$$

其初始条件为 $v(0)=V(0)$. 对 (10) 式再利用脉冲参数的已知条件进行放大，可得

$$v'(t)\le v(t)\big(\tilde A_1-\tilde A_{11}n_1v(t)\big).$$

经过计算可知，存在 $T_1>0$，当 $t>T_1$ 时，$v(t)\le M_1/n_1$. 由脉冲比较定理[16]及引理2.1可知，当 $t>T_1$ 时，$V(t)\le N_1M_1/n_1$，即当 $t>T_1$ 时，有

$$x_i(t)\le N_1M_1/n_1,\quad i=1,2,\cdots,n.\tag{11}$$

从系统 (1) 的第三个等式及已知条件，可以推出

$$y'(t)\le y(t)\Big(-b_1(t)-b_{11}(t)y(t)+\frac{g(t)}{\beta(t)}\Big)\le y(t)\Big(\frac{g^m}{\beta^l}-b_1^l-b_{11}^ly(t)\Big).\tag{12}$$

令

$$B_1=\frac{g^m}{\beta^l}-b_1^l,\quad B_{11}=b_{11}^l,\quad M_2=\frac{g^m-b_1^l\beta^l}{\beta^lb_{11}^l},$$

则结合系统(1)和(12)式，可以得到如下脉冲系统

$$\begin{cases} y'(t) \le y(t)\big(B_1 - B_{11}y(t)\big), & t \ne t_k, \quad k = 1, 2, \cdots, \\ y(t^+) = (1-\mu_k)y(t), & t = t_k, \quad k = 1, 2, \cdots, \end{cases} \tag{13}$$

初值条件为 $y(s) = \psi(s) > 0$, $s \in [-\tau, 0]$, $y(0^+) = \psi(0)$.

考虑如下非脉冲方程

$$v'(t) = v(t)\Big(B_1 - B_{11}\prod_{0 \le t_k < t}(1-\mu_k)v(t)\Big), \tag{14}$$

其初始条件为 $v(0) = \psi(0)$. 对(14)式再利用脉冲参数的已知条件进行放大，可得

$$v'(t) \le v(t)\big(B_1 - B_{11}n_2 v(t)\big).$$

经过计算可知，存在 $T_2 > T_1$，当 $t > T_2$ 时，$v(t) \le M_2/n_2$. 由脉冲比较定理[16]及引理2.1可知，当 $t > T_2$ 时，有

$$y(t) \le N_2 M_2/n_2, \tag{15}$$

令 $M = \max\{N_1M_1/n_1, N_2M_2/n_2\}$，则从(11)和(15)式可得：当 $t > T_2$ 时，有

$$x_i(t) \le M, \quad i = 1, 2, \cdots, n, \quad y(t) \le M, \tag{16}$$

即当 t 充分大时，$x_i(t) \le M$, $i = 1, 2, \cdots, n$, $y(t) \le M$.

令

$$m_1 = \left\{\frac{a_1^l - Ml_{11}^m - c^m/\gamma^l}{a_{11}^m}, \frac{a_i^l - Ml_{1i}^m}{a_{ii}^m}, i = 2, 3, \cdots, n\right\}.$$

定理2.1　若有

(H1)　$m_1 > 0$;　　(H2)　$\frac{g^l n_1 m_1}{2N_1\alpha^m + \beta^m n_1 m_1 + 2\gamma^m N_1 M} - b_1^m - Ml_{21}^m > 0$;

则系统(1)是一致持久的.

证明　设 $(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t), y(t))$ 是系统(1)满足初始条件(2)的解，则从系统(1)的第一个和第二个等式和引理2.3，可知存在 $T_3 > 0$，当 $t > T_3$ 时，有

$$x_1' > x_1(a_1^l - Ml_{11}^m - c^m/\gamma^l - a_{11}^m x_1) + d_1^l f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

$$x_i' > x_i\big(a_i^l - Ml_{1i}^m - a_{ii}^m x_i(t)\big) + d_i^l f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad i = 2, 3, \cdots, n.$$

设 $V_1(t) = \min\{x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)\}$，沿系统(1)计算 $V_1(t)$ 的左下导数，则有以下几种可能：

1)　$V_1(t) = x_1(t)$，则

$$D^-V_1(t) \ge V_1(t)\big(a_1^l - Ml_{11}^m - c^m/\gamma^l - a_{11}^m V_1(t)\big); \tag{17}$$

2)　$V(t) = x_i(t)$, $i = 2, 3, \cdots, n$，则

$$D^-V_1(t) \ge V_1\big(a_i^l - Ml_{ii}^m - a_{ii}^m V_1(t)\big). \tag{18}$$

令 $\tilde{a}_1 \in \{a_1^l - Ml_{11}^m - c^m/\gamma^l, a_i^l - Ml_{ii}^m, i = 2, 3, \cdots, n\}$，$\tilde{a}_{11} \in \{a_{ii}^m, i = 1, 2, \cdots, n\}$，而且满足

$$\frac{\tilde{a}_1}{\tilde{a}_{11}} = \min\left\{\frac{a_1^l - Ml_{11}^m - c^m/\gamma^l}{a_{11}^m}, \frac{a_i^l - Ml_{1i}^m}{a_{ii}^m}, i = 1, 2, \cdots, n\right\} = m_1,$$

则结合系统 (1) 和 (17), (18) 式，可以得到如下脉冲系统

$$\begin{cases} D^- V_1(t) \geq V_1(t)\big(\tilde{a}_1 - \tilde{a}_{11} V_1(t)\big), & t \neq t_k, \quad k = 1, 2, \cdots, \\ V_1(t^+) = p_k V_1(t), & t = t_k, \quad k = 1, 2, \cdots, \end{cases} \tag{19}$$

其中 $p_k = \min\{1 - \theta_k^i,\ i = 1, 2, \cdots, n\}$. 初值条件为

$$V_1(s) = \min\big\{\varphi_i(s),\ i = 1, 2, \cdots, n,\ s \in [-\tau, 0]\big\},\ V_1(0^+) = \min\big\{\varphi_i(0),\ i = 1, 2, \cdots, n\big\}.$$

考虑如下非脉冲方程

$$v_1'(t) = v_1(t)\Big(\tilde{a}_1 - \tilde{a}_{11} \prod_{0 \leq t_k < t} p_k v_1(t)\Big), \tag{20}$$

其初始条件为 $v_1(0) = V_1(0)$. 对 (19) 式再利用脉冲参数的已知条件进行缩小，可得

$$v_1'(t) \geq v_1(t)\big(\tilde{a}_1 - \tilde{a}_{11} N_1 v_1(t)\big). \tag{21}$$

经过计算可知，存在 $T_4 > T_3$，当 $t > T_4$ 时，$v_1(t) \geq m_1/(2N_1)$. 由脉冲比较定理[16] 及引理 2.1 可知，当 $t > T_4$ 时，$V_1(t) \geq n_1 m_1/(2N_1)$，即当 $t > T_4$ 时，有

$$x_i(t) \geq \frac{n_1 m_1}{2N_1}, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{22}$$

从系统 (1) 的第三个等式，引理 2.3 和 (22) 式，可知当 $t > T_4$ 时，有

$$y'(t) \geq y(t)\Big[\frac{g^l n_1 m_1}{2N_1 \alpha^m + \beta^m n_1 m_1 + 2MN_1 \gamma^m} - b_1^m - M l_{21}^m - b_{11}^m y(t)\Big]. \tag{23}$$

令

$$\tilde{b}_1 = \frac{g^l n_1 m_1}{2N_1 \alpha^m + \beta^m n_1 m_1 + 2\gamma^m N_1 M} - b_1^m - M l_{21}^m, \quad \tilde{b}_{11} = b_{11}^m, \quad m_2 = \frac{\tilde{b}_1}{\tilde{b}_{11}},$$

则结合系统 (1) 和 (23) 式，可以得到如下脉冲系统

$$\begin{cases} y'(t) \geq y(t)\big(\tilde{b}_1 - \tilde{b}_{11} y(t)\big), & t \neq t_k, \quad k = 1, 2, \cdots, \\ y(t^+) = (1 - \mu_k) y(t), & t = t_k, \quad k = 1, 2, \cdots, \end{cases} \tag{24}$$

其初值条件为 $y(s) = \psi(s), s \in [-\tau, 0],\ y(0^+) = \psi(0)$.

考虑如下非脉冲方程

$$u'(t) = u(t)\Big(\tilde{b}_1 - \tilde{b}_{11} \prod_{0 \leq t_k < t} (1 - \mu_k) u(t)\Big), \tag{25}$$

其初始条件为 $u(0) = \psi(0)$. 对 (25) 式再利用脉冲参数的已知条件进行缩小，可得

$$u'(t) \geq u(t)\big(\tilde{n}_1 - \tilde{b}_{11} N_2 u(t)\big). \tag{26}$$

经过计算可知，存在 $T_5 > T_4$，当 $t > T_5$ 时，$u(t) \geq m_2/(2N_2)$. 由脉冲比较定理[16] 及引理 2.1 可知，当 $t > T_5$ 时，有

$$y(t) \geq \frac{n_2 m_2}{2N_2}. \tag{27}$$

令 $m = \min\{\frac{n_1 m_1}{2N_1}, \frac{n_2 m_2}{2N_2}\}$，则

$$\Gamma = \big\{(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t), y(t)) \,|\, m \leq x_i(t) \leq M,\ i = 1, 2, \cdots, n,\ m \leq y(t) \leq M\big\}. \tag{28}$$

显然集合 Γ 是 R_+^{n+1} 的一个有界紧子集. 从以上讨论可知，当 t 充分大时系统 (1) 满足初始条件 (2) 的每一个解最终都进入并滞留在集合 Γ 中，所以系统 (1) 是一致持久的.

3　正周期解的存在性及稳定性

本节中首先给出系统 (1) 存在正周期解的充分条件，然后讨论周期解的稳定性.

定理 3.1　如果条件 (H1) 和 (H2) 成立，那么以 $\omega>0$ 为周期的系统 (1) 至少存在一个正周期解.

证明　由引理 2.2 可知，$\mathbf{R}_{+}^{n+1}$ 是系统 (1) 的不变集，因而系统存在一个正不变集，则式 (28) 中所定义的集合 Γ 是系统的一个正不变集.

定义 Poinare 映射 $\Phi:\Gamma\to\Gamma$，即

$$\Phi\big(x_1(0^+),x_2(0^+),\cdots,x_n(0^+),y(0^+)\big)=\big(x_1(\omega^+),x_2(\omega^+),\cdots,x_n(\omega^+),y(\omega^+)\big),\tag{29}$$

显然集合 Γ 是 $\mathbf{R}_{+}^{n+1}$ 上的有界凸的闭子集，映射 Φ 是 Γ 到 Γ 的自映射．由解对初值的连续依赖性，Φ 为连续算子，由 Brouwer 不动点定理可知，Φ 在 Γ 中存在不动点，即系统 (1) 至少存在一个正周期解.

定理 3.2　设 $(\tilde{x}_1(t),\tilde{x}_2(t),\cdots,\tilde{x}_n(t),\tilde{y}(t))$ 是系统 (1) 满足初值条件 (2) 的一个正的有界解. 若有条件 (H1), (H2) 及以下条件成立

(H3)　$a_{11}^l-l_{11}^m-\dfrac{c^m\beta^mM+g^m\alpha^m+g^m\gamma^mM}{\Delta(m)}-\displaystyle\sum_{j=2}^{n}\frac{d_j^mL_j}{m}>0$;

(H4)　$a_{ii}^l-l_{1i}^m-\displaystyle\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\frac{d_j^mL_j}{m}>0,\ i=2,3,\cdots,n$;

(H5)　$b_{11}^l+l_{21}^l-\dfrac{c^m\beta^mM+g^m\alpha^m+g^m\gamma^mM}{\Delta(m)}>0$;

其中 $\Delta(m)=(\alpha^l+\beta^lm+\gamma^lm)^2$，则 $(\tilde{x}_1(t),\tilde{x}_2(t),\cdots,\tilde{x}_n(t),\tilde{y}(t))$ 是全局渐近稳定的.

证明　设 $(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t),y(t))$ 是系统 (1) 满足初值条件 (2) 的一个解. 从定理 2.1 和 (28) 式中定义的集合 Γ 可知，存在 $T_6>0$，当 $t>T_6$ 时，$(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t),y(t))\in\Gamma$，存在 $t_0>0$，当 $t>T_6+t_0$ 时，$(\tilde{x}_1(t),\tilde{x}_2(t),\cdots,\tilde{x}_n(t),\tilde{y}(t))\in\Gamma$. 即当 $t>T_6+t_0$ 时，有

$$0<m\le x_i(t),\quad \tilde{x}_i(t)\le M,\quad i=1,2,\cdots,n,\quad 0<m\le y(t),\quad \tilde{y}_(t)\le M.$$

令

$$x_i^*=\ln x_i(t),\quad i=1,2,\cdots,n,\quad y^*=\ln y(t),\quad \tilde{x}_i^*=\ln\tilde{x}_i(t),\quad i=1,2,\cdots,n,\quad \tilde{y}^*=\ln\tilde{y}(t).$$

考虑如下的 Lyapunov 函数

$$\begin{aligned}V_2(t)\ =\ &\sum_{i=1}^{n}\Big(\big|x_i^*(t)-\tilde{x}_i^*(t)\big|+l_{1i}^m\int_{-\tau}^{0}k_{1i}(s)\int_{t+s}^{t}\big|x_i(v)-\tilde{x}_i(v)\big|\mathrm{d}v\mathrm{d}s\Big)\\&+\big|y^*(t)-\tilde{y}^*(t)\big|+l_{21}^m\int_{-\tau}^{0}k_{21}(s)\int_{t+s}^{t}\big|y(v)-\tilde{y}(v)\big|\mathrm{d}v\mathrm{d}s,\end{aligned}\tag{30}$$

则当 $t \in (t_{k-1}, t_k] \subset [T_6 + t_0, +\infty)$ 时，计算函数 $V_2(t)$ 的右上导数，可得

$$\begin{aligned}
D^+V_2(t) = & \operatorname{sign}(x_1^* - \tilde{x}_1^*)\Big[-a_{11}(t)(x_1 - \tilde{x}_1) - l_{11}(t)\int_{-\tau}^{0} k_{11}(s)\big(x_1(t+s) - \tilde{x}_1(t+s)\big)\mathrm{d}s \\
& - \frac{c(t)y(t)}{\alpha(t) + \beta(t)x_1(t) + \gamma(t)y(t)} + \frac{c(t)\tilde{y}(t)}{\alpha(t) + \beta(t)\tilde{x}_1(t) + \gamma(t)\tilde{y}(t)} \\
& + \frac{d_1(t)}{x_1} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) - \frac{d_1(t)}{\tilde{x}_1} f_1(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \cdots, \tilde{x}_n)\Big] \\
& + \sum_{i=2}^{n} \operatorname{sign}(x_i - \tilde{x}_i)\Big[-a_{ii}(t)(x_i^* - \tilde{x}_i^*) - l_{1i}(t)\int_{-\tau}^{0} k_{1i}(s)\big(x_i(t+s) - \tilde{x}_i(t+s)\big)\mathrm{d}s \\
& + \frac{d_1(t)}{x_1} f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) - \frac{d_1(t)}{\tilde{x}_i} f_i(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \cdots, \tilde{x}_n)\Big] \\
& + \operatorname{sign}(y^* - \tilde{y}^*)\Big[-b_{11}(t)(y - \tilde{y}) - l_{21}(t)\int_{-\tau}^{0} k_{21}(s)\big(y(t+s) - \tilde{y}(t+s)\big)\mathrm{d}s \\
& + \frac{g(t)x_1(t)}{\alpha(t) + \beta(t)x_1(t) + \gamma(t)y(t)} - \frac{g(t)\tilde{x}_1(t)}{\alpha(t) + \beta(t)\tilde{x}_1(t) + \gamma(t)\tilde{y}(t)}\Big] \\
& + \sum_{i=1}^{n} l_{1i}^m \Big[\int_{-\tau}^{0} k_{1i}(s)\big|x_i(t) - \tilde{x}_i(t)\big|\mathrm{d}s - \int_{-\tau}^{0} k_{1i}(s)\big|x_i(t+s) - \tilde{x}_i(t+s)\big|\mathrm{d}s\Big] \\
& + l_{21}^m \Big[\int_{-\tau}^{0} k_{21}(s)\big|y(t) - \tilde{y}(t)\big|\mathrm{d}s - \int_{-\tau}^{0} k_{21}(s)\big|y(t+s) - \tilde{y}(t+s)\big|\mathrm{d}s\Big].
\end{aligned} \tag{31}$$

注意到

$$\begin{aligned}
& \operatorname{sign}(x_1^* - \tilde{x}_1^*)\Big[-\frac{c(t)y(t)}{\alpha(t) + \beta(t)x_1(t) + \gamma(t)y(t)} + \frac{c(t)\tilde{y}(t)}{\alpha(t) + \beta(t)\tilde{x}_1(t) + \gamma(t)\tilde{y}(t)}\Big] \\
\leq & \frac{c^m\alpha^m + c^m\beta^m M}{\Delta(m)}\big|y(t) - \tilde{y}(t)\big| + \frac{c^m\beta^m M}{\Delta(m)}\big|x_1(t) - \tilde{x}_1(t)\big|,
\end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
& \operatorname{sign}(y^* - \tilde{y}^*)\Big[\frac{g(t)x_1(t)}{\alpha(t) + \beta(t)x_1(t) + \gamma(t)y(t)} - \frac{g(t)\tilde{x}_1(t)}{\alpha(t) + \beta(t)\tilde{x}_1(t) + \gamma(t)\tilde{y}(t)}\Big] \\
\leq & \frac{g^m\alpha^m + g^m\gamma^m M}{\Delta(m)}\big|x_1(t) - \tilde{x}_1(t)\big| + \frac{g^m\gamma^m M}{\Delta(m)}\big|y(t) - \tilde{y}(t)\big|,
\end{aligned} \tag{33}$$

其中 $\Delta(m) = (\alpha^l + \beta^l m + \gamma^l m)^2$.

令

$$D_i(t) = \operatorname{sign}(x_i^* - \tilde{x}_i^*)\Big[\frac{d_i(t)}{x_i} f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) - \frac{d_i(t)}{\tilde{x}_i} f_i(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \cdots, \tilde{x}_n)\Big],$$

从广义扩散函数 $f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的定义出发，分情况讨论 x_i 和 $\tilde{x}_i$ 的大小关系，可推导出

$$D_i(t) \leq \frac{d_i^m L_i}{m} \sum_{j=1}^{n} \big|x_j - \tilde{x}_j\big|. \tag{34}$$

参照 (32)-(34)，对 (31) 式进行放大，可得

$$
\begin{aligned}
D^+V_2(t) \le & -\Big(a_{11}^l - l_{11}^m - \frac{c^m\beta^m M + g^m\alpha^m + g^m\gamma^m M}{\Delta(m)} - \sum_{j=2}^n \frac{d_j^m L_j}{m}\Big)|x_1 - \tilde{x}_1| \\
& - \sum_{i=2}^n \Big(a_{ii}^l - l_{1i}^m - \sum_{j=1,j\neq i}^n \frac{d_j^m L_j}{m}\Big)|x_i - \tilde{x}_i| \\
& - \Big(b_{11}^l + l_{21}^l - \frac{c^m\beta^m M + g^m\alpha^m + g^m\gamma^m M}{\Delta(m)}\Big)|y - \tilde{y}|. \qquad (35)
\end{aligned}
$$

根据条件 (H3)-(H5)，可知存在一个常数 $\delta > 0$，当 $t \in (t_{k-1}, t_k] \subset [T_6 + t_0, +\infty)$ 时，有

$$
D^+V_2(t) \le -\delta\Big(\sum_{i=1}^n |x_i - \tilde{x}_i| + |y - \tilde{y}|\Big), \qquad (36)
$$

$$
\begin{aligned}
V_2(t_k^+) = & \sum_{i=1}^n \Big(\big|x_i^*(t_k^+) - \tilde{x}_i^*(t_k^+)\big| + l_{1i}^m \int_{-\tau}^0 k_{1i}(s) \int_{t_k^+ + s}^{t_k^+} \big|x_i(v) - \tilde{x}_i(v)\big| \mathrm{d}v\mathrm{d}s\Big) \\
& + \big|y^*(t_k^+) - \tilde{y}^*(t_k^+)\big| + l_{21}^m \int_{-\tau}^0 k_{21}(s) \int_{t_k^+ + s}^{t_k^+} \big|y(v) - \tilde{y}(v)\big| \mathrm{d}v\mathrm{d}s \\
= & \sum_{i=1}^n \Big(\big|\ln(1-\theta_k^i)x_i(t_k) - \ln(1-\theta_k^i)\tilde{x}_i(t_k)\big| \\
& + l_{1i}^m \int_{-\tau}^0 k_{1i}(s) \int_{t_k^+ + s}^{t_k^+} \big|x_i(v) - \tilde{x}_i(v)\big| \mathrm{d}v\mathrm{d}s\Big) + \big|\ln(1-\mu_k)y(t_k) - \ln(1-\mu_k)\tilde{y}(t_k)\big| \\
& + l_{21}^m \int_{-\tau}^0 k_{21}(s) \int_{t_k^+ + s}^{t_k^+} \big|y(v) - \tilde{y}(v)\big| \mathrm{d}v\mathrm{d}s = \lim_{t \to t_k^+} V_2(t) = V_2(t_k). \qquad (37)
\end{aligned}
$$

由 (36) 式和 (37) 式，可知当 $t \in [T_6 + t_0, +\infty)$ 时，有

$$
D^+V_2(t) \le -\delta\Big(\sum_{i=1}^n |x_i - \tilde{x}_i| + |y - \tilde{y}|\Big), \qquad (38)
$$

对 (38) 式在区间 $[T_6 + t_0, t]$ 上积分，可得

$$
V_2(t) + \delta \int_{T_6+t_0}^t \Big(\sum_{i=1}^n \big|x_i(s) - \tilde{x}_i(s)\big| + \big|y(s) - \tilde{y}(s)\big| \Big)\mathrm{d}s \le V_2(T_6 + t_0) < +\infty,
$$

于是

$$
\int_{T_6+t_0}^t \Big(\sum_{i=1}^n \big|x_i(s) - \tilde{x}_i(s)\big| + \big|y(s) - \tilde{y}(s)\big| \Big)\mathrm{d}s \le V_2(T_6 + t_0)/\delta < +\infty,
$$

所以

$$
\sum_{i=1}^n \big|x_i(t) - \tilde{x}_i(t)\big| + \big|y(t) - \tilde{y}(t)\big| \in L^1(T_6 + t_0, +\infty).
$$

由定理2.1可知，函数 $|x_i(t)-\tilde{x}_i(t)|$, $i=1,2,\cdots,n$, $|y(t)-\tilde{y}(t)|$ 在 $[T_6+t_0,+\infty)$ 上的导数有界，因此

$$\sum_{i=1}^{n}\left|x_i(t)-\tilde{x}_i(t)\right|+\left|y(t)-\tilde{y}(t)\right|$$

在 $[T_6+t_0,+\infty)$ 上是一致连续的.

由文献[25]可知

$$\sum_{i=1}^{n}\left|x_i(t)-\tilde{x}_i(t)\right|+\left|y(t)-\tilde{y}(t)\right|=0.$$

由以上讨论可知

$$\lim_{t\to+\infty}\left|x_i(t)-\tilde{x}_i(t)\right|=0,\quad i=1,2,\cdots,n,\quad \lim_{t\to+\infty}\left|y(t)-\tilde{y}(t)\right|=0,$$

由文献[22]中全局渐近稳定性的定义，可知 $(\tilde{x}_1(t),\tilde{x}_2(t),\cdots,\tilde{x}_n(t),\tilde{y}(t))$ 是全局渐近稳定的.

使用定理3.1和构造与定理3.2中相似的Lyapunov函数，可以得到如下推论.

推论 3.1 如果条件(H1)-(H5)成立，则以 $\omega>0$ 为周期的系统(1)存在一个周期为 $\omega>0$ 正周期解，而且是全局渐近稳定的.

参照文献[18-21]和文献[24]中对捕食者-食饵系统存在正周期解的充分条件，不难获得以下关于系统(1)至少存在一个周期为 $\omega>0$ 的正周期解的充分条件.

定理 3.3 如果以下条件

(H6) $\bar{a}_1+\frac{1}{\omega}\sum\limits_{k=1}^{q}\ln(1+\theta_k^1)>\overline{c/\gamma}+L_1\bar{d}_1$;

(H7) $\bar{a}_i+\frac{1}{\omega}\sum\limits_{k=1}^{q}\ln(1+\theta_k^i)>L_1\bar{d}_i,\ i=2,3,\cdots,n$;

(H8) $\frac{1}{\omega}\sum\limits_{k=1}^{q}\ln(1+\mu_k)>\bar{b}_1$;

成立，则系统(1)至少有一个周期为 $\omega>0$ 的正周期解.

4 结论

本文研究了具有Beddington-DeAngelis功能反应、脉冲、连续时滞和广义扩散函数的捕食者-食饵系统的一致持久性和周期解. 首先引入三个引理，然后利用脉冲微分方程的比较原理讨论了系统(1)持续生存的条件，使用Brower不动点理论证明了正周期解的存在性，进而给出系统(1)存在以 $\omega>0$ 为周期的正周期解的充分条件. 通过构造Lyapnov函数证明了系统(1)的周期解是全局渐近稳定的. 从研究中发现，在满足一定的条件下脉冲参数影响了系统各种群数量的上下界及全局渐近稳定性，扩散行为不影响系统的一致持久性，但在系统的全局渐近稳定性中发挥了作用，时滞参数对系统的影响不显著.

参考文献:

[1] Cushing J M. Periodic time-dependent predator-prey system[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 1977, 32(1): 82-95

[2] Levin S A. Dispersion and population interaction[J]. The American Naturalist, 1974, 108(960): 207-228

[3] Gaines R E, Mawhin J L. Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1977

[4] Cai L M, Song X Y, Chen Q J. Permanence and stability in a delayed ration-dependent predator-prey system with stage structure for predator[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2006, 23(3): 537-542

[5] 李艳玲，马逸尘. 四种群食物链方程的整体渐近稳定性[J]. 工程数学学报，2006, 23(3): 407-413
Li Y L, Ma Y C. Global asymptotic stability of four-species food-chain systems[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2006, 23(3): 407-413

[6] 秦发金. 一类具有收获率和比率的时滞阶段结构的扩散捕食系统的多重正周期解[J]. 工程数学学报，2009, 26(4): 671-679
Qin F J. Multiple periodic solution for a delayed stage-structure predator-prey systems with ratio-dependence and harvestion rate and diffusion[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2009, 26(4): 671-679

[7] Yang K. Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics[M]. New York: Academic Press, 1993

[8] Panetta J C. A mathematical model of periodically pulsed chemotherapy: tumor recurrence and metastasis in a competition environment[J]. Bulletin of Mathematical Biology, 1996, 58(3): 425-447

[9] Song X, Chen L. Persistence and global stability for nonautonomous predator-prey system with diffusion and time-delay[J]. Computers & Mathematics with Applications, 1998, 35(6): 33-40

[10] Cuevas C, Pinto M. Asymptotic properties of solutions to nonautonomous Volterra difference systems with infinite delay[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2001, 42(3-5): 671-685

[11] Wang L L, Wan T. Existence and global stability of positive periodic solutions of a predator-prey system with delays[J]. Applied Mathematics and Computation, 2003, 146(1): 167-185

[12] Ding X H, Lu C. Existence of positive periodic solution of ratio-dependent delay N-species difference system[J]. Applied Mathematical Modelling, 2009, 33(6): 2748-2756

[13] 王爱丽，陈斯养，王东保. 广义Logistic单种群时滞生态模型的渐进性[J]. 兰州大学学报(自然科学版)，2004, 40(2): 8-12
Wang A L, Chen S Y, Wang D B. Asymptotic properties for the general delay Logistic single species biological models[J]. Journal of Lanzhou University (Natural Science Edition), 2004, 40(2): 8-12

[14] 王爱丽，陈斯养. 具有多时滞和广义扩散的捕食链模型的一致持久性[J]. 南昌大学学报(理科版)，2006, 30(1): 17-22
Wang A L, Chen S Y. Uniform persistence for nonautonomous food-chain system with delays and general diffusion[J]. Journal of Nanchang University (Natural Science), 2006, 30(1): 17-22

[15] 李小玲，胡广平. 时滞食饵-捕食系统平衡点的稳定性和周期解[J]. 兰州大学学报(自然科学版)，2009, 45(2): 81-84
Li X L, Hu G P. Stability and periodic solutions in a predator-prey system with delays[J]. Journal of Lanzhou University (Natural Science Edition), 2009, 45(2): 81-84

[16] Bainov D D, Simeonov P S. Impulsive Differential Equations: Periodic Solutions and Applications[M]. New York: Longman, 1993

[17] Xu R, Chen L S. Persistence and global stability for a delayed nonautonomous predator-prey system without dominating instantaneous negative feedback[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2001, 262(1): 50-61

[18] Tang S, Chen L. The periodic predator-prey Lotka-Volterra model with impulsive effect[J]. Journal Mechanics in Medicine and Biology, 2002, 2(3): 267-296

[19] Liu X, Chen L. Complex dynamics of holling type II Lotka-Volterra predator-prey system with impulsive perturbations on predator[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2003, 16: 311-320

[20] Cai L M, Li X Z. Positive periodic solutions for a nonautonomous delayed predator-prey system with diffusion and impulses[J]. Acta Analysis Functionlis Applicata, 2008, 10(2): 139-149

[21] Zhang S, Chen L. A study of predator-prey models with the Beddington-DeAnglis functional response and impulsive effect[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2006, 27(1): 237-248

[22] Naji R K, Balasim A T. Dynamical behavior of a three species food chain model with Eddington-DeAngelis functional response[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2007, 32(5): 1853-1866

[23] Huo H F, Li W T, Nieto J J. Periodic solutions of delayed predator-prey model with the Benddington-

DeAngelis functional response[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2007, 33(2): 505-512

[24] Cai L M, Li X Z, Yu J Y, *et al.* Dynamics of a nonautonomous predator-prey dispersion-delay system with Beddington-DeAngelis function response[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2009, 40(4): 2064-2075

[25] Beretta E, Takeuchi Y. Global asymptotic stability of Lotka-Volterra diffusion models with continuous time delays[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 1988, 48(3): 627-651

[26] 王烈，陈斯养，石茂. 带有脉冲、时滞和广义扩散函数的捕食者-食饵系统正周期解的存在性[J]. 兰州大学学报(自然科学版)，2010, 46(1): 96-104
Wang L, Chen S Y, Shi M. Existence of positive periodic solution of predator-prey system with impulsive, time delay and general diffusion[J]. Journal of Lanzhou University (Natural Science Edition), 2010, 46(1): 96-104

Qualitative Analysis of Predator-prey System with Beddington-DeAngelis Functional Response, Impulsive, Continuous Delay and General Diffusion

WANG Lie, CHEN Si-yang, SHI Mao

(College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062)

Abstract: A nonautonomous predator-prey model consisting of n-competing preys and one predator with the Beddington-DeAngelis functional response, impulsive, continuous delay and general diffusion is proposed. First, it is proved that the system is uniform persistence by using the comparing theorem of the impulsive system. Secondly, the existence of periodic solutions is proved through the Brower fixed point theory. Through constructing a Lyapunov mapping, the sufficient conditions for the existence of the positive periodic solution and the global asymptotic stability of the positive periodic solution are obtained. Our results provide a reliable tactic basis for the practical biological resource management.

Keywords: predator-prey system; impulsive; time delay; positive periodic solution; global asymptotic stability

Received: 07 Aug 2009. **Accepted:** 19 Oct 2010.

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (60671063; 10871122).